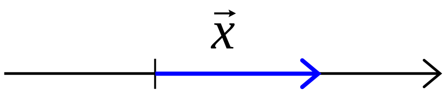
Opakování - Fyzikální veličiny

Míry fyzikálních vlastností: X = x [X]

- **skalární** : velikost (hmotnost, délka, teplota, energie)
- **vektorové:** velikost + směr (poloha, rychlost, zrychlení, síla, hybnost)

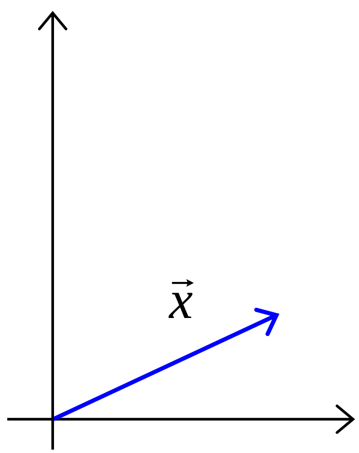
1 D

- skalár: x
- vektor: $\pm\, x$



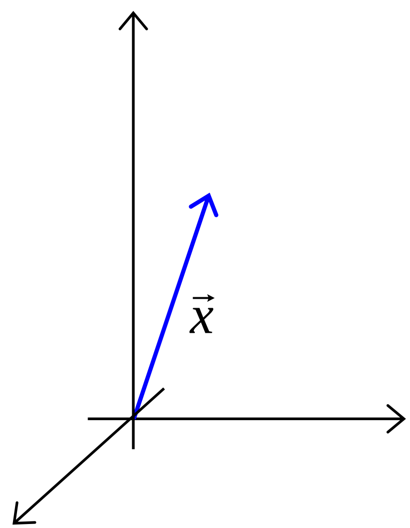
2 D

- skalár: x
- vektor: (x,y)



3 D

- skalár: x
- vektor: (x,y,z)



***n* D**

- skalár: x
- vektor: $(x_1, x_2, ..., x_n)$

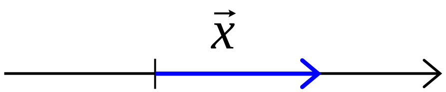
Opakování - Fyzikální veličiny

Míry fyzikálních vlastností: $x = \mathrm{x}\,[X]$

- **skalární** : invariantní vůči volbě souřadnicové soustavy
- **vektorové:** závisí na volbě souřadnicové soustavy

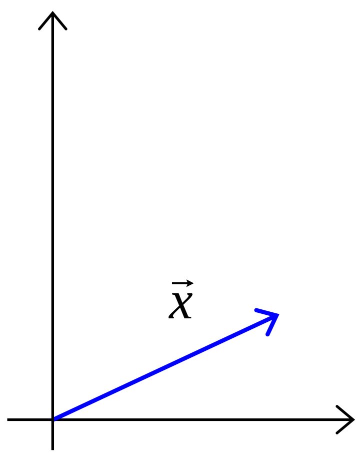
1 D

- skalár: x
- vektor: $\pm\, x$



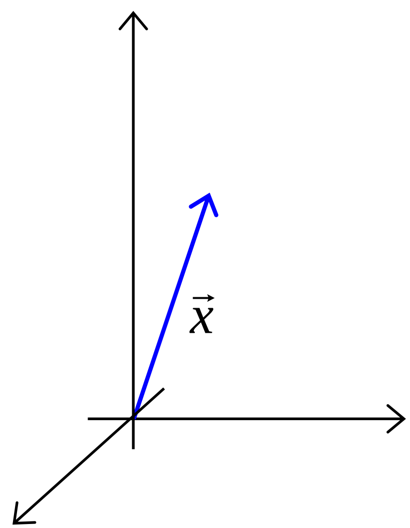
2 D

- skalár: x
- vektor: (x,y)



3 D

- skalár: x
- vektor: (x,y,z)



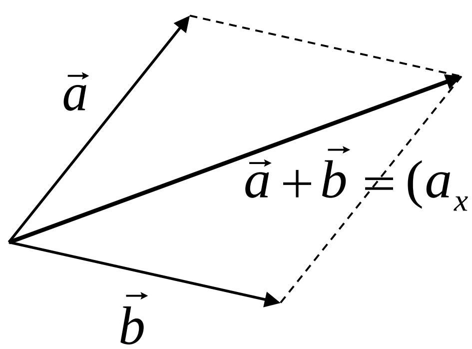
***n* D**

- skalár: x
- vektor: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

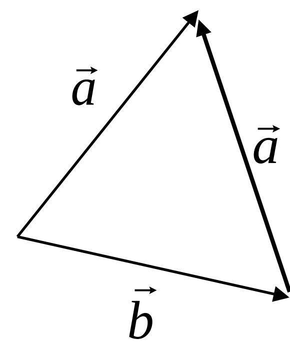
Opakování - Vektorové fyzikální veličiny

• **velikost vektoru:** $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ (skalár) často se píše: $|\vec{a}| \equiv a$

• **součet / rozdíl vektorů:**

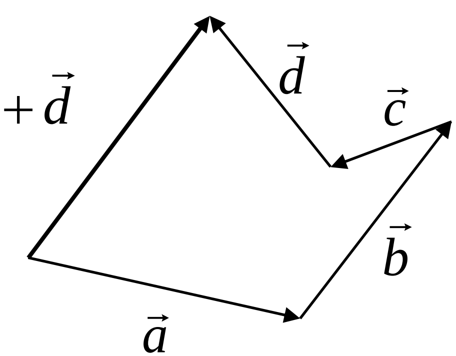


$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$$



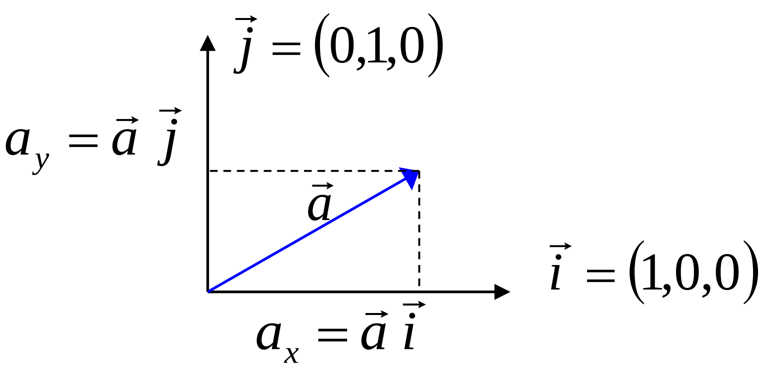
$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$$

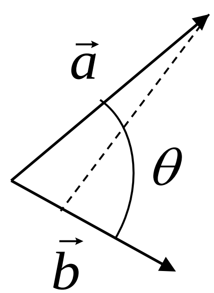
$$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$$



Opakování - Vektorové fyzikální veličiny

• **skalární součin:** $\vec{a}\,\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab\cos\theta$ (skalár)



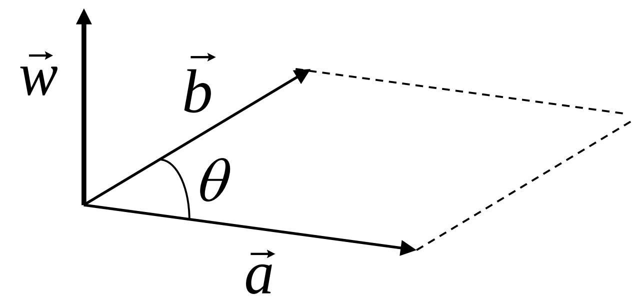


velikost průmětu vektoru *a* do směru *b*: $\dfrac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{b}|} = a\cos\theta$

Opakování - Vektorové fyzikální veličiny

• **vektorový součin v 3D:**

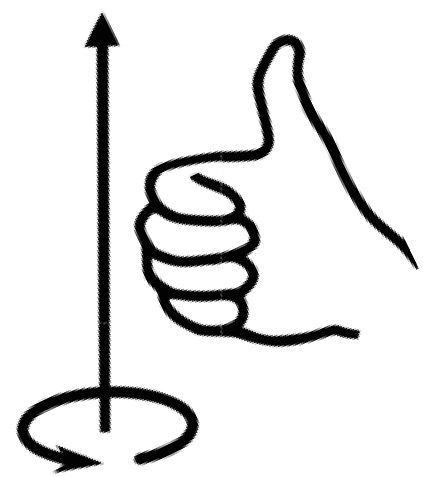
$$\vec{w} \equiv \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_y b_z - a_z b_y, a_z b_x - a_x b_z, a_x b_y - a_y b_x\right)$$



(vektor kolmý na $\vec{a}$ a $\vec{b}$) $\vec{w}\,\vec{a} = 0$ $\vec{w}\,\vec{b} = 0$

$$\left|\vec{w}\right| \equiv w = ab\sin\theta$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{w}$ tvoří pravotočivý systém



Kinematika

• **hmotný bod:** těleso s nekonečně malými rozměry, ale nenulovou hmotností,
tj. žádné otáčení, žádná deformace atd. = **bodová hmotnost**

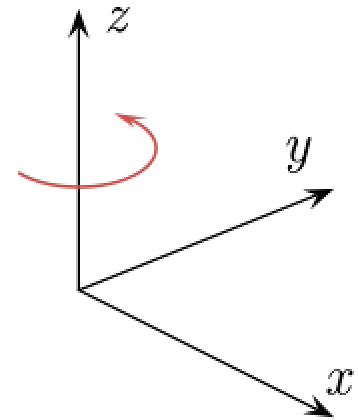
• popis pohybu hmotného bodu – tj. poloha hmotného bodu v závislosti na čase

• polohový (radius) vektor $\vec{r}$

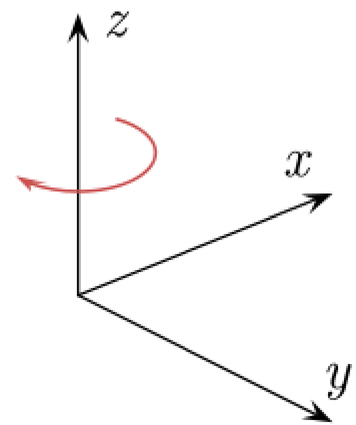
Opakování - Kartézská soustava souřadnic

• K číselnému vyjádření polohy tělesa používáme soustavy souřadnic spojené se vztažným tělesem.
• Podle symetrie popisovaných pohybů lze volit různé souřadné systémy.
• Nejčastěji používáme pravoúhlý (kartézský) systém, tvořený třemi navzájem kolmými rovinami, které se protínají v pravoúhlých osách x, y, z.
• Průsečík těchto os O nazýváme počátkem vztažné soustavy souřadnic.

Pravotočivá



Levotočivá



jednotkové vektory ve směru souřadnicových os

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

Opakování - Kartézská soustava souřadnic

• ortonormální báze

$$\vec{i} = (1,0,0)$$

$$\vec{j} = (0,1,0)$$

$$\vec{k} = (0,0,1)$$

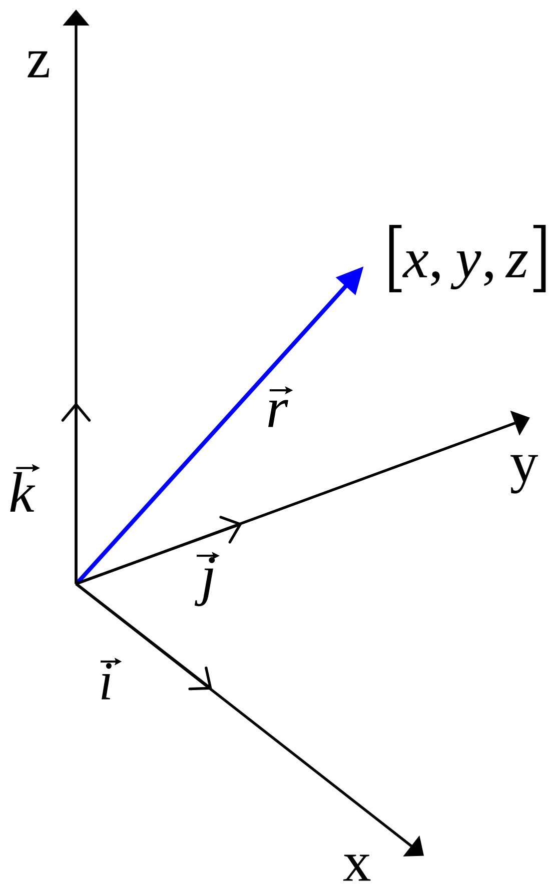
$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

$$\vec{i}\,\vec{j} = 0$$

$$\vec{i}\,\vec{k} = 0$$

$$\vec{j}\,\vec{k} = 0$$

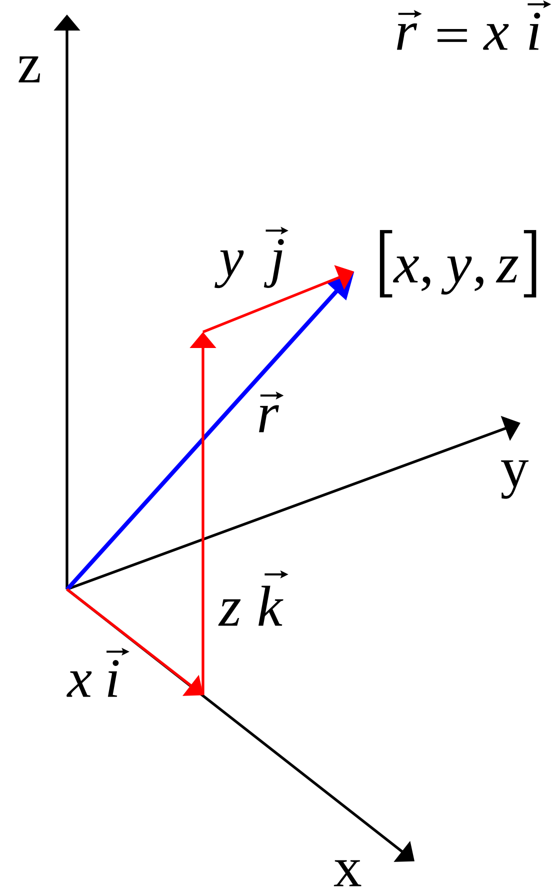
$$\vec{a}\,\vec{b} = ab\cos\theta$$



Opakování - Kartézská soustava souřadnic

• **polohový (radius) vektor**

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x, y, z)$$



velikost polohového vektoru:

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Opakování - Kartézská soustava souřadnic

• **polohový (radius) vektor**

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k} = (x, y, z)$$

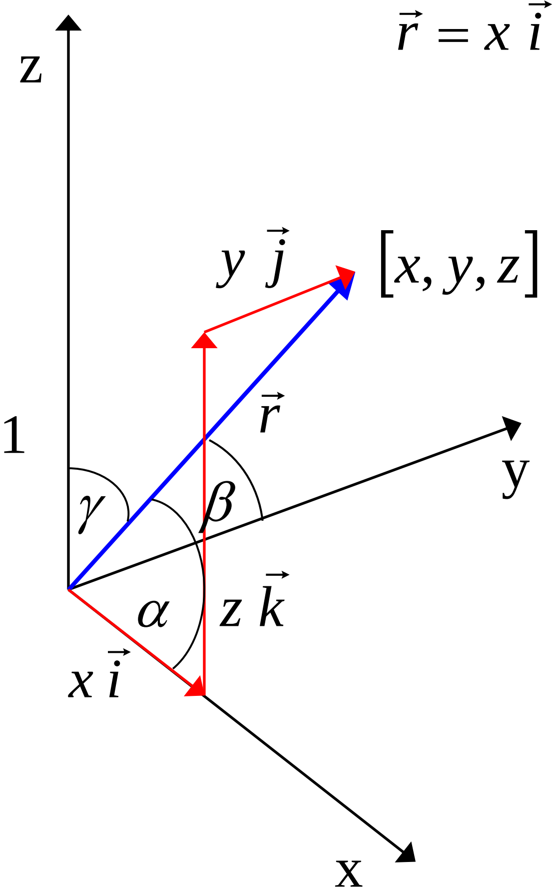
směrové kosiny:

$$\vec{r}\,\vec{i} = x = r\cos\alpha$$

$$\vec{r}\,\vec{j} = y = r\cos\beta$$

$$\vec{r}\,\vec{k} = z = r\cos\gamma$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$



velikost polohového vektoru:

$$r \equiv |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Opakování - Obecné souřadnice

- kartézské souřadnice: x, y, z
- obecné souřadnice: q_1, q_2, q_3

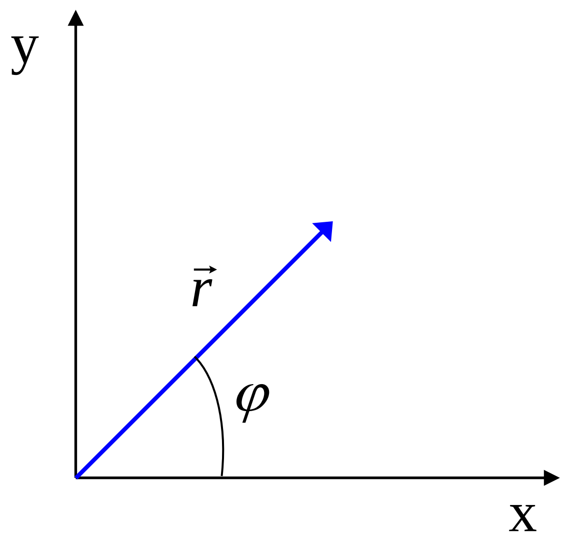
$$x = x(q_1, q_2, q_3) \qquad q_1 = q_1(x, y, z)$$

$$y = y(q_1, q_2, q_3) \qquad q_2 = q_2(x, y, z)$$

$$z = z(q_1, q_2, q_3) \qquad q_3 = q_3(x, y, z)$$

Opakování - Polární souřadnice

- kartézské souřadnice: x, y
- obecné souřadnice: r, φ



$$x = r\cos\varphi$$

$$y = r\sin\varphi$$

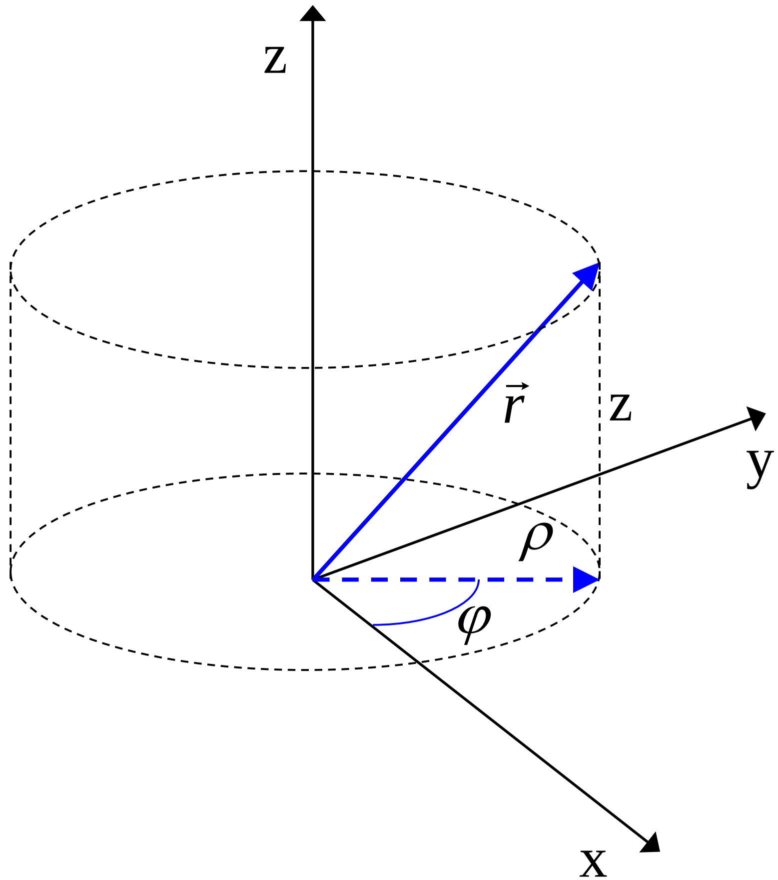
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$

Opakování - Cylindrická soustava souřadnic

• kartézská soustava souřadnic: x, y, z

• cylindrická (válcová) soustava souřadnic: ρ, φ, z

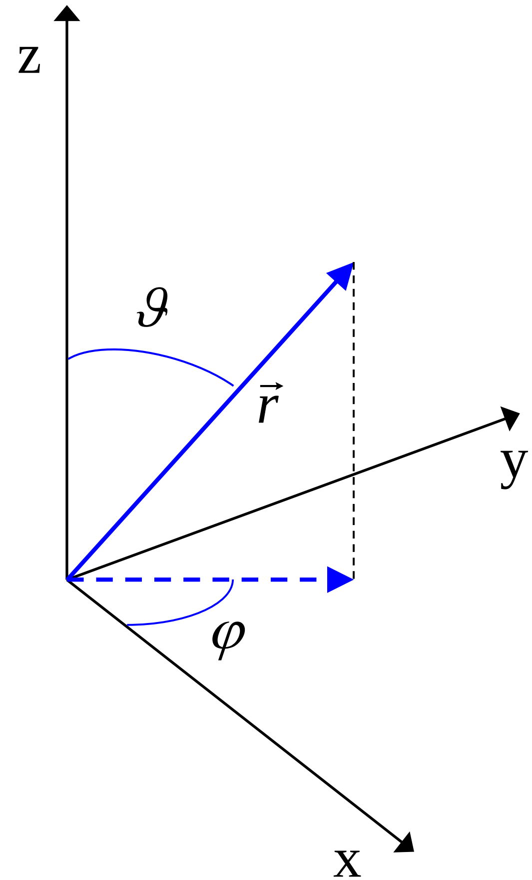


$$x = \rho \cos\varphi$$
$$y = \rho \sin\varphi$$
$$z = z$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\varphi = \mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$$
$$z = z$$

Opakování - Sférická soustava souřadnic

- kartézská soustava souřadnic: x, y, z
- sférická soustava souřadnic: r, ϑ, φ



$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\vartheta = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$
$$\varphi = \mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}$$

Kinematika

- **hmotný bod:** těleso s nekonečně malými rozměry, ale nenulovou hmotností,
  tj. žádné otáčení, žádná deformace atd.

- popis pohybu hmotného bodu – tj. poloha hmotného bodu v závislosti na čase

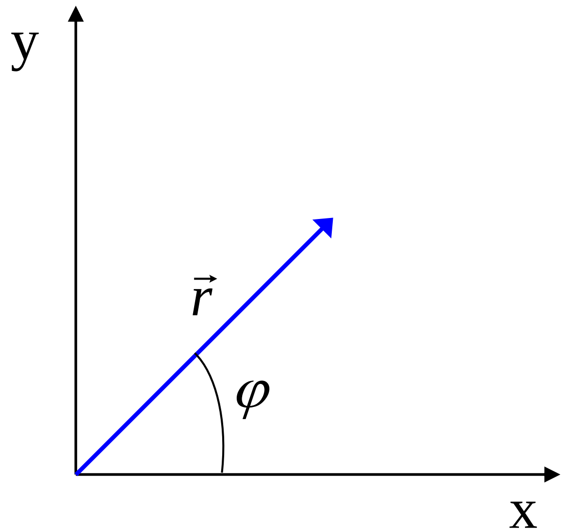
- polohový (radius) vektor $\vec{r}$

- **trajektorie**: křivka, kterou vytváří koncový bod polohového vektoru

- parametrické vyjádření trajektorie $\vec{r} = \vec{r}(t)$

kartézské souřadnice	cylindrické souřadnice	sférické souřadnice
$x = x(t)$	$\rho = \rho(t)$	$r = r(t)$
$y = y(t)$	$\varphi = \varphi(t)$	$\vartheta = \vartheta(t)$
$z = z(t)$	$z = z(t)$	$\varphi = \varphi(t)$

Kruhový pohyb



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

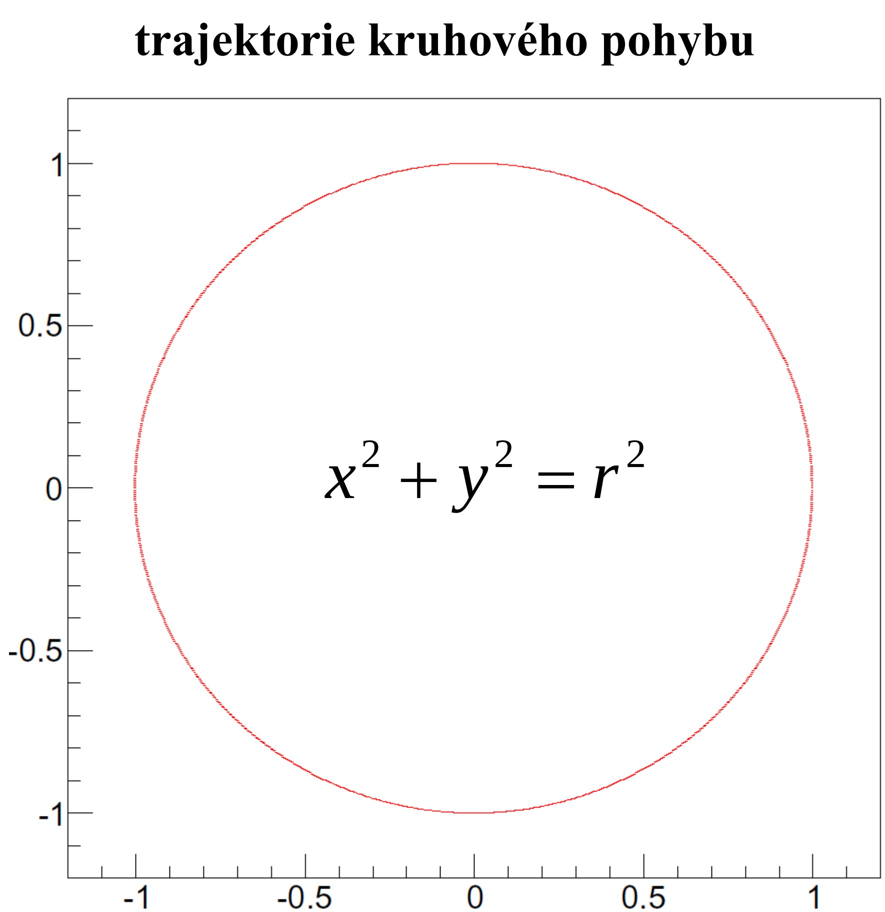
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi f} = \frac{1}{f}$$ - perioda

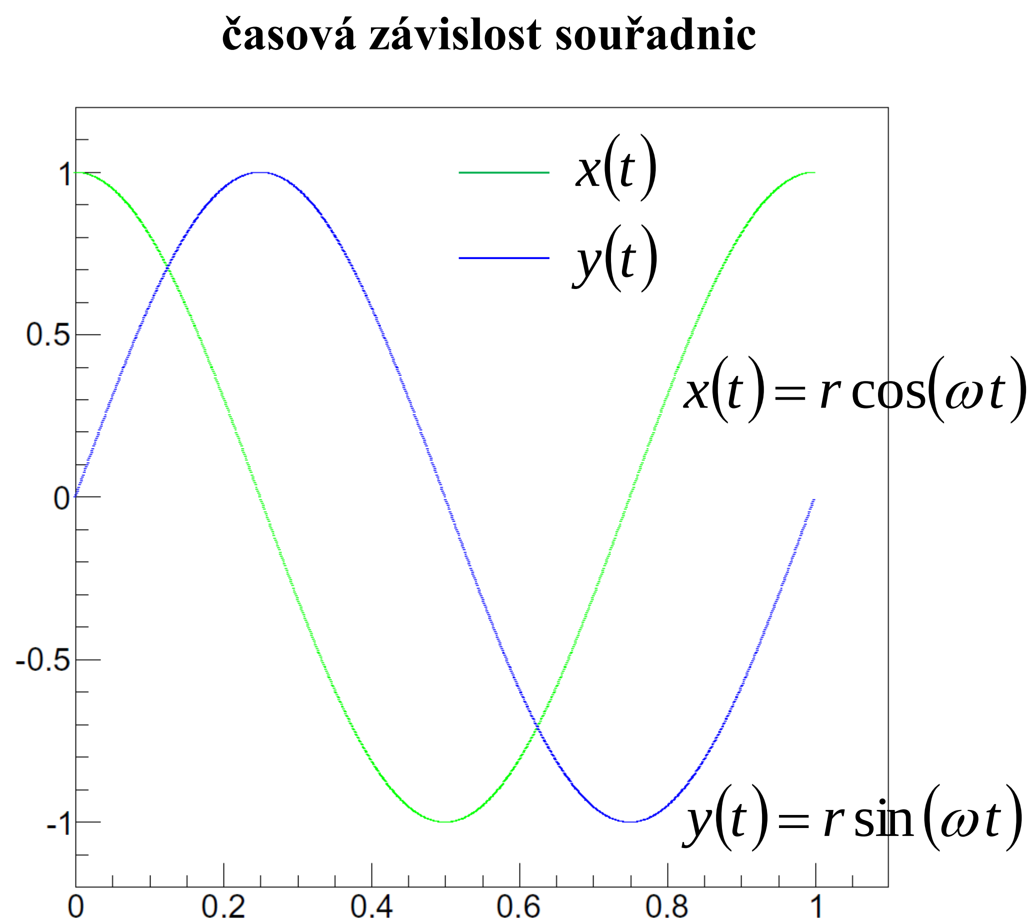
• Neparametrickou rovnici dráhy pohybu (kružnici) lze získat vyloučením parametru *t*:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = r^2\cos^2(\omega t) + r^2\sin^2(\omega t) = r^2\left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t)\right) = r^2$$

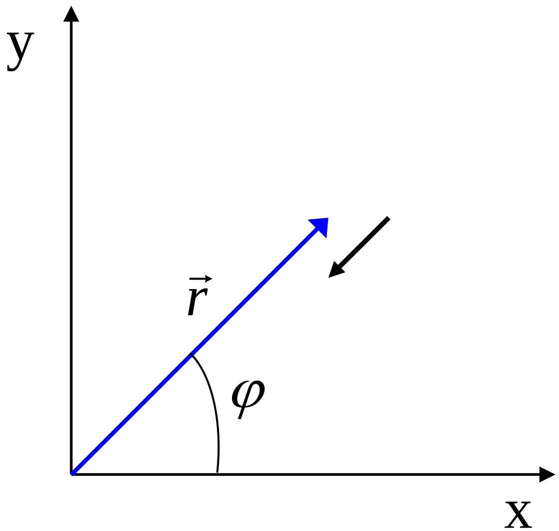
$$x^2 + y^2 = r^2$$

Kruhový pohyb





Kruhový pohyb + zmenšování *r*



polární souřadnice

$$r(t) = r_0 - v_r t$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = (r_0 - v_r t)\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = (r_0 - v_r t)\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

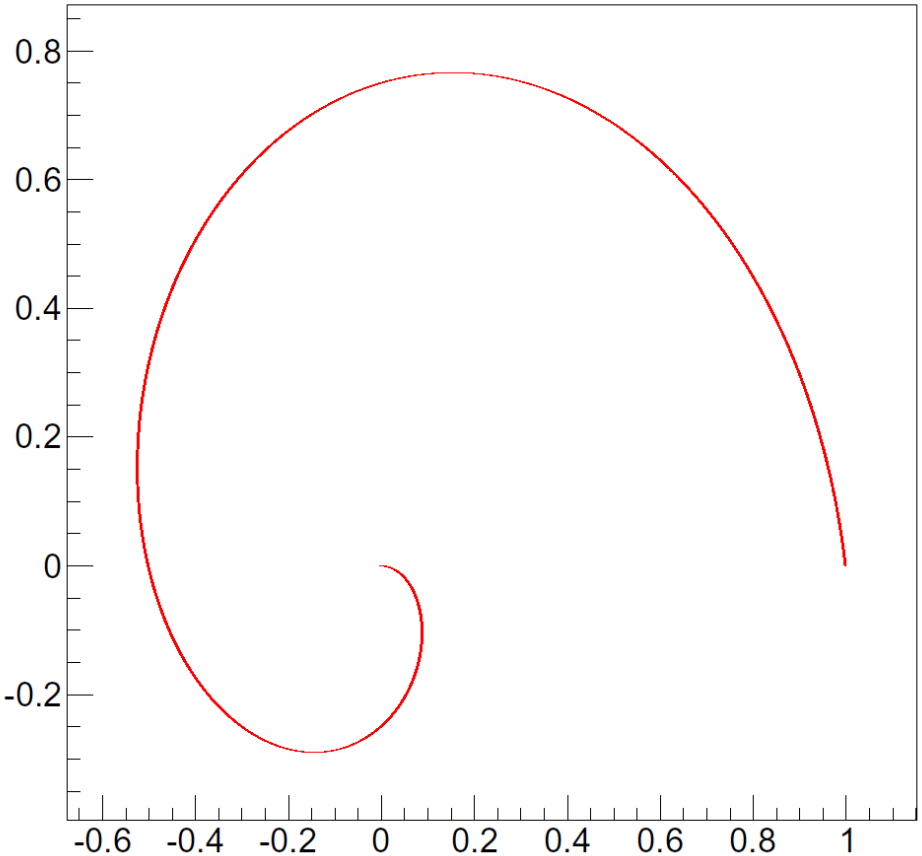
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$ - perioda

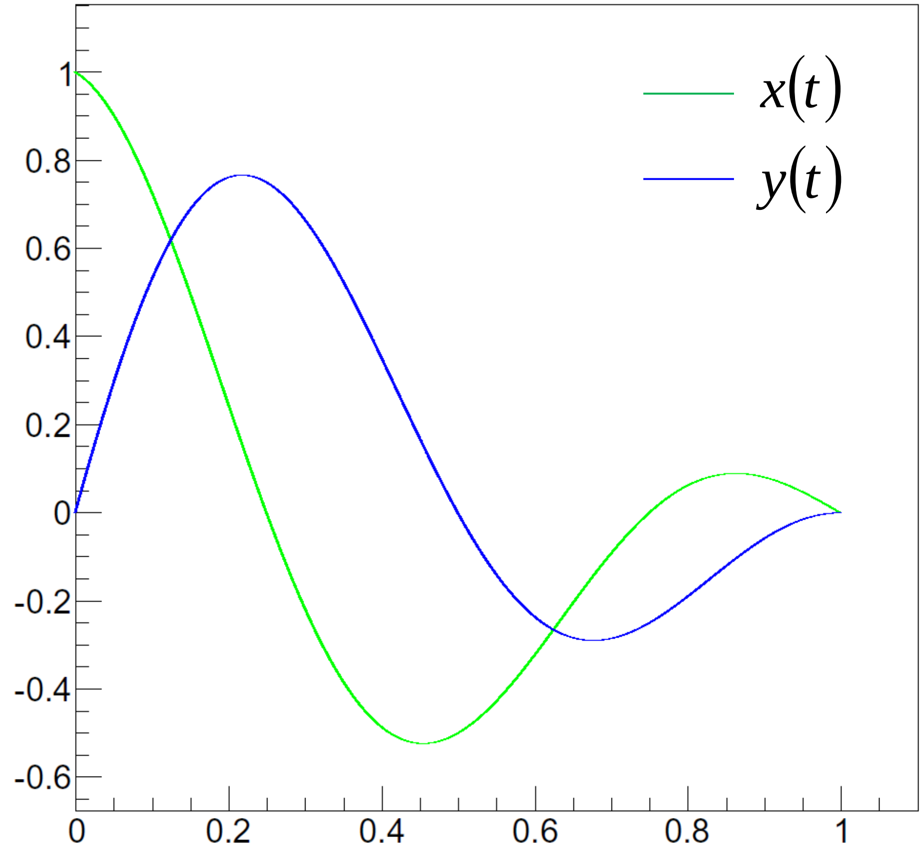
$$r(T) = 0 = r_0 - v_r T \Rightarrow v_r = \frac{r_0}{T}$$

Kruhový pohyb + zmenšování r

$$v_r = \frac{r_0}{T} = \frac{r_0}{2\pi}\omega$$

za jednu otočku: $r_0 \to 0$

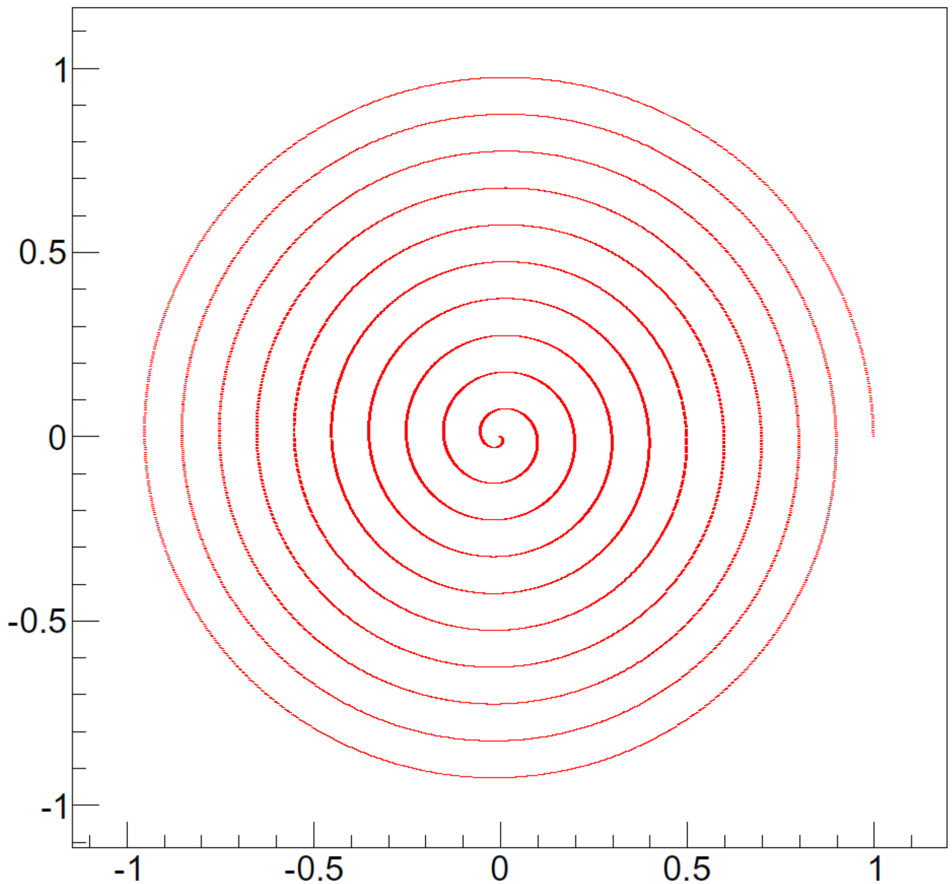


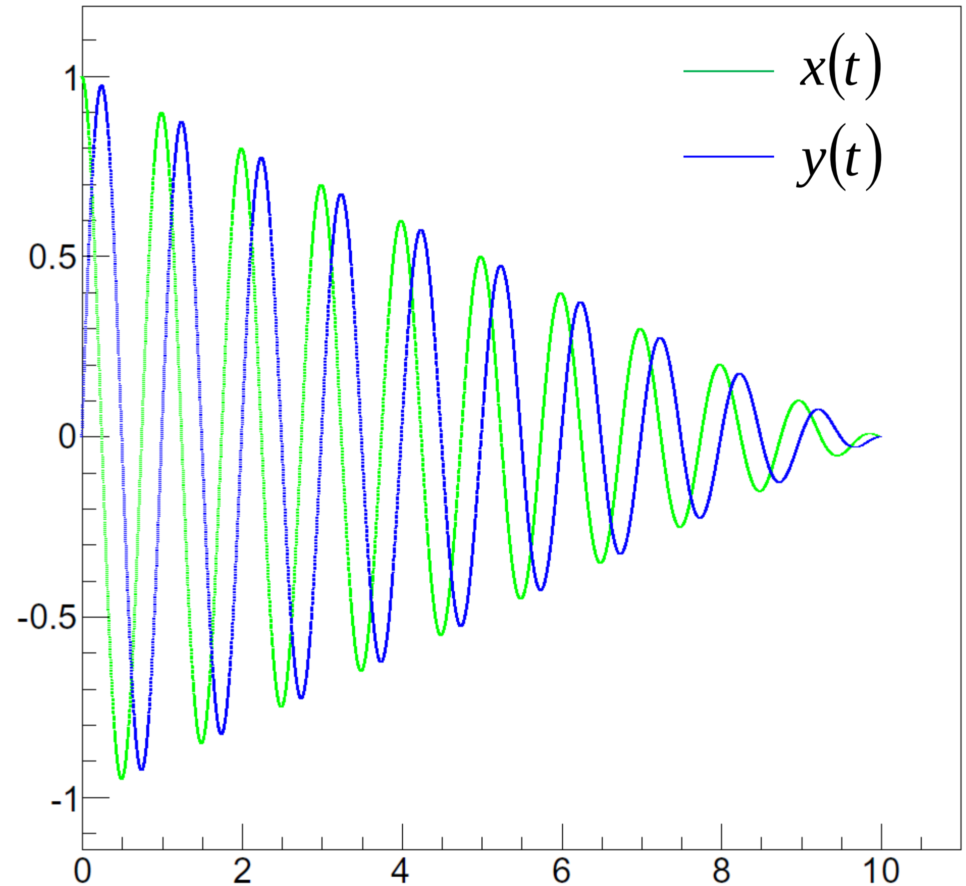


Kruhový pohyb + zmenšování *r*

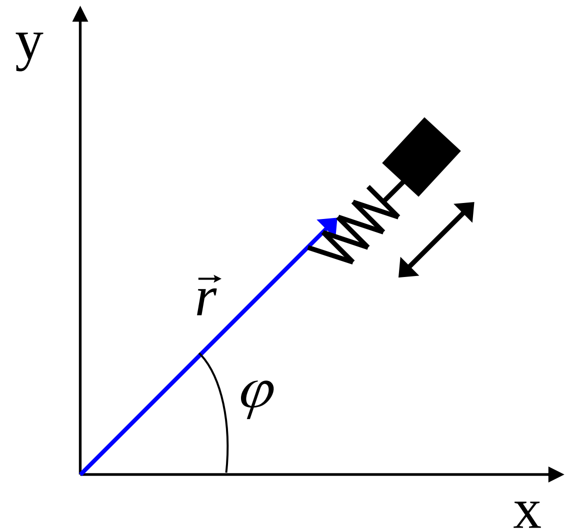
$$v_r = \frac{r_0}{10T} = \frac{r_0}{10}\frac{\omega}{2\pi}$$

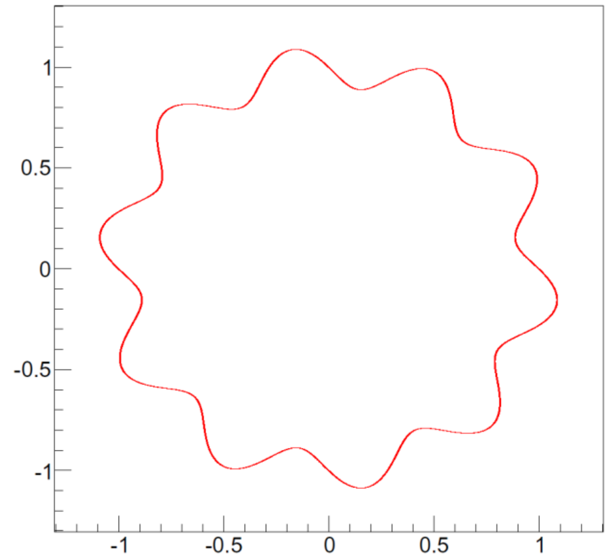
za jednu otočku: $r_0 \rightarrow 0.9\, r_0$





Kruhový pohyb + kmity





$$A = 0.1 r_0$$

$$f_r = \frac{10\omega}{2\pi} = 10 f$$

polární souřadnice

$$r(t) = r_0 + A\sin(2\pi f_r t)$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

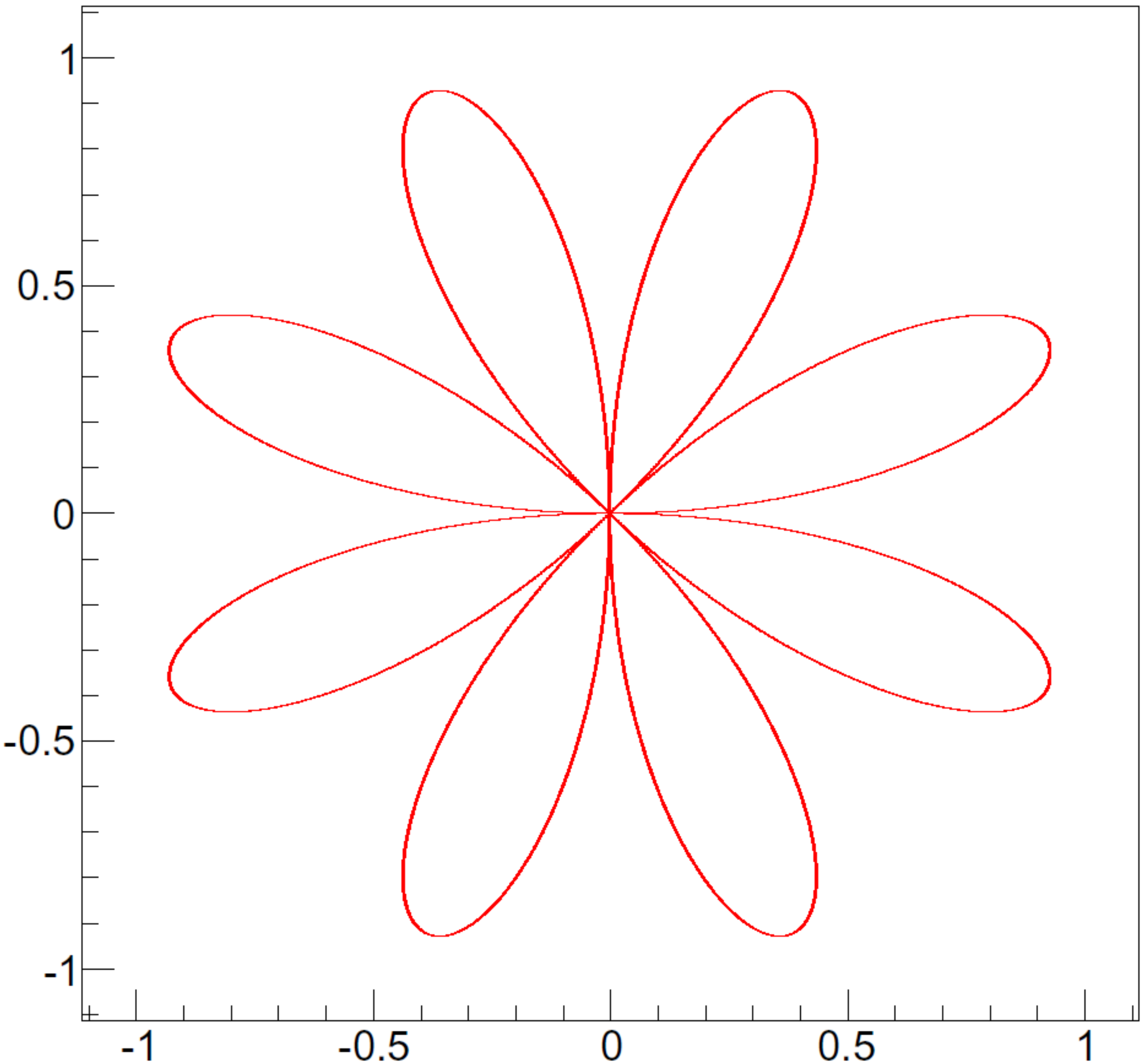
$$x(t) = (r_0 + A\sin(2\pi f_r t))\cos(\omega t)$$

$$y(t) = (r_0 + A\sin(2\pi f_r t))\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost $\quad$ f_r - frekvence kmitů

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$ - perioda $\quad$ A - amplituda kmitů

DÚ: Napište parametrické vyjádření trajektorie pomocí polárních a kartézských souřadnic



$r_0 = ? \quad f_r = ? \quad A = ?$

Trajektorie

cylindrické souřadnice

$$\rho(t) = \rho$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

$$z(t) = v t$$

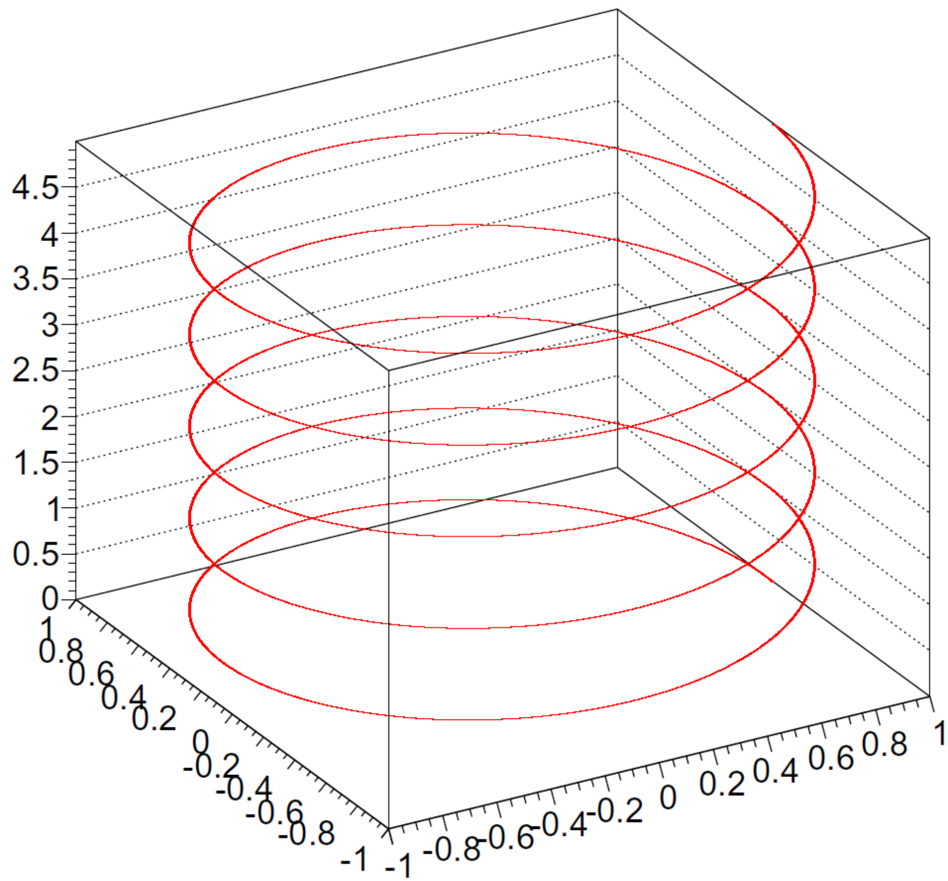
kartézské souřadnice

$$x(t) = \rho \cos(\omega t)$$

$$y(t) = \rho \sin(\omega t)$$

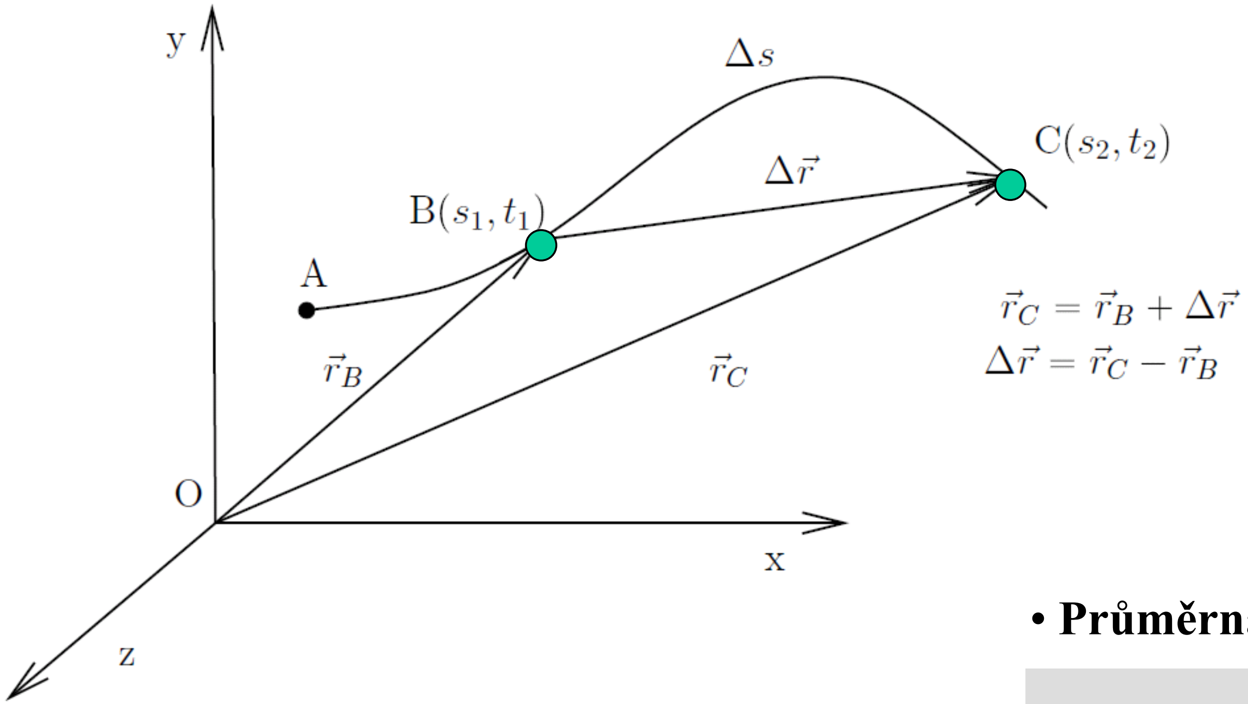
$$z(t) = v t$$

$$z(T) = \rho = v T \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\rho}{T}$$



Rychlost

• K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



• Přemístíme-li hmotný bod z polohy B do polohy C, proběhl tento bod dráhu: $\Delta s = s_2 - s_1$

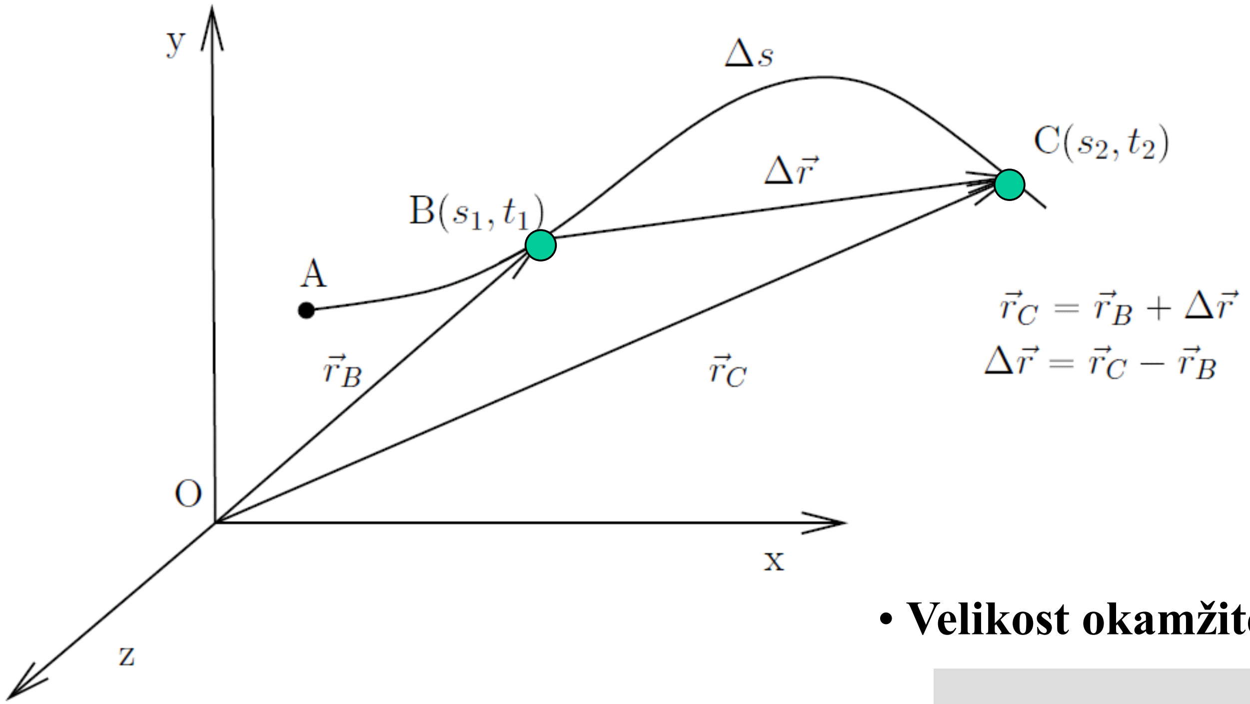
za čas: $\Delta t = t_2 - t_1$

• **Průměrná rychlost hmotného bodu:**

$$v_{12} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



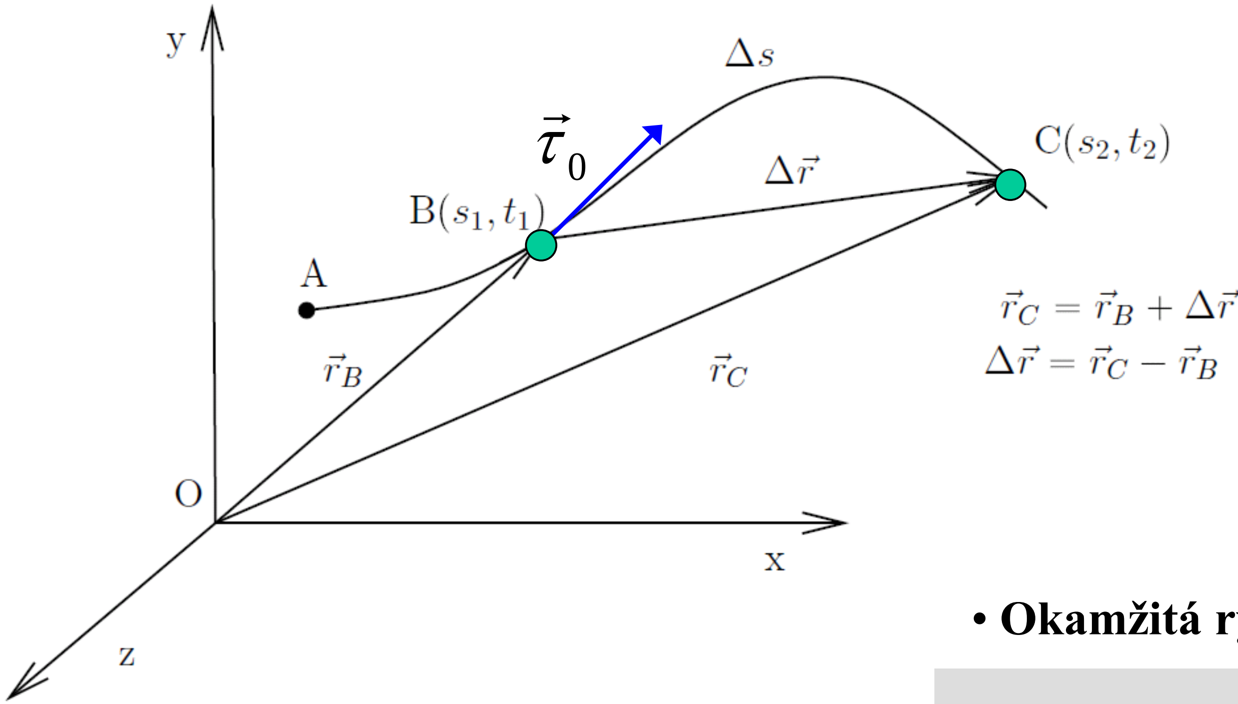
- Budeme-li zmenšovat interval $\Delta t = t_2 - t_1$ bude se bod C blížit bodu B v čase t_1

- **Velikost okamžité rychlosti hmotného bodu:**

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} s(t) = \dot{s}$$

Rychlost

- K popisu časového průběhu pohybu hmotného bodu zavádí **kinematika** veličiny **rychlost** a **zrychlení**.



- **Okamžitá rychlost hmotného bodu:**

$$\vec{v} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau}_0 = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

- Při přibližování bodu C k bodu B přejde $\Delta\vec{r}$ na vektor $d\vec{r}$, který bude mít směr tečny k dráze $\vec{\tau}_0$ a velikost ds.
  Potom:

$$d\vec{r} = ds \cdot \vec{\tau}_0$$

Rychlost

Okamžitá rychlost je vektor, který má směr tečny ke křivočaré dráze v místě, ve kterém okamžitou rychlost určujeme, a míří ve směru pohybu**:**

$$\vec{v} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

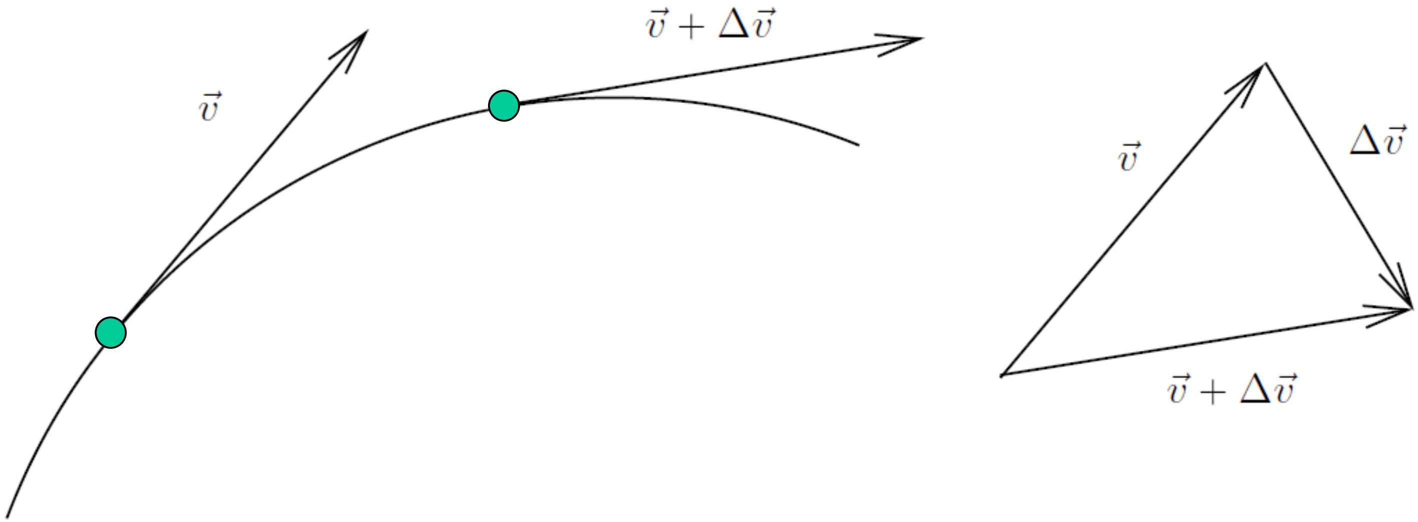
$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

- **přímočarý pohyb** – nemění se směr rychlosti $\vec{\tau}_0$
- **rovnoměrný pohyb** – nemění se velikost rychlosti:

$$v = \left|\vec{v}\right| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad \left[\mathrm{m/s}\right]$$

Zrychlení



- při obecném **křivočarém pohybu** se mění jak směr, tak jeho rychlost pohybu hmotného bodu

- **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

Zrychlení

• **okamžité zrychlení** hmotného bodu**:**

$$\vec{a} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{\vec{r}}$$

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

• **zrychlení** hmotného bodu je vektorem jehož směr je totožný s přírůstkem rychlosti $\mathrm{d}\vec{v}$

• **velikost zrychlení**:

$$a = \left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{dv_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dv_z}{dt}\right)^2} \quad \left[\mathrm{m/s}^2\right]$$

Klasifikace pohybů a jejich příklady

Pohyb dělíme na

- přímočarý, který se děje v přímce
- křivočarý, což jsou všechny ostatní případy.

Dalším kritériem je velikost rychlosti:

- pohyb je rovnoměrný při $|\vec{v}| = konst.$
- pohyb je nerovnoměrný při $|\vec{v}| \neq konst.$

- **Přímočarý rovnoměrný zrychlený pohyb:**

$$x = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = at + v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = a$$

- **Přímočarý pohyb** hmotného bodu**:**

$$x = x(t),\ y = 0,\ z = 0$$

- **Přímočarý rovnoměrný pohyb:**

$$x = v_0 t + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

Klasifikace pohybů a jejich příklady

- **harmonický pohyb po přímce:**

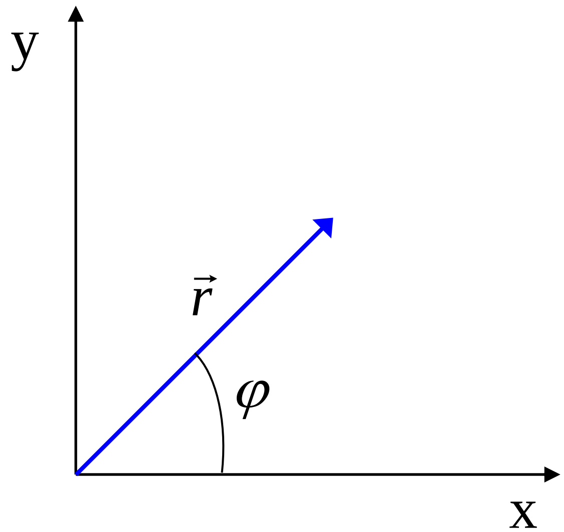
$$x = A\sin\left(\omega t + \alpha\right) + x_0$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + \alpha\right)$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2 \sin\left(\omega t + \alpha\right) = -\omega^2\left(x - x_0\right)$$

- Zrychlení harmonického pohybu je tedy úměrné výchylce a míří proti ní.

Rovnoměrný pohyb po kružnici



polární souřadnice

$$r(t) = r$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos\varphi = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin\varphi = r\sin(\omega t)$$

ω - úhlová rychlost

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f}$$ - perioda

• Neparametrickou rovnici dráhy pohybu (kružnici) lze získat vyloučením parametru *t:*

$$x^2 + y^2 = r^2$$

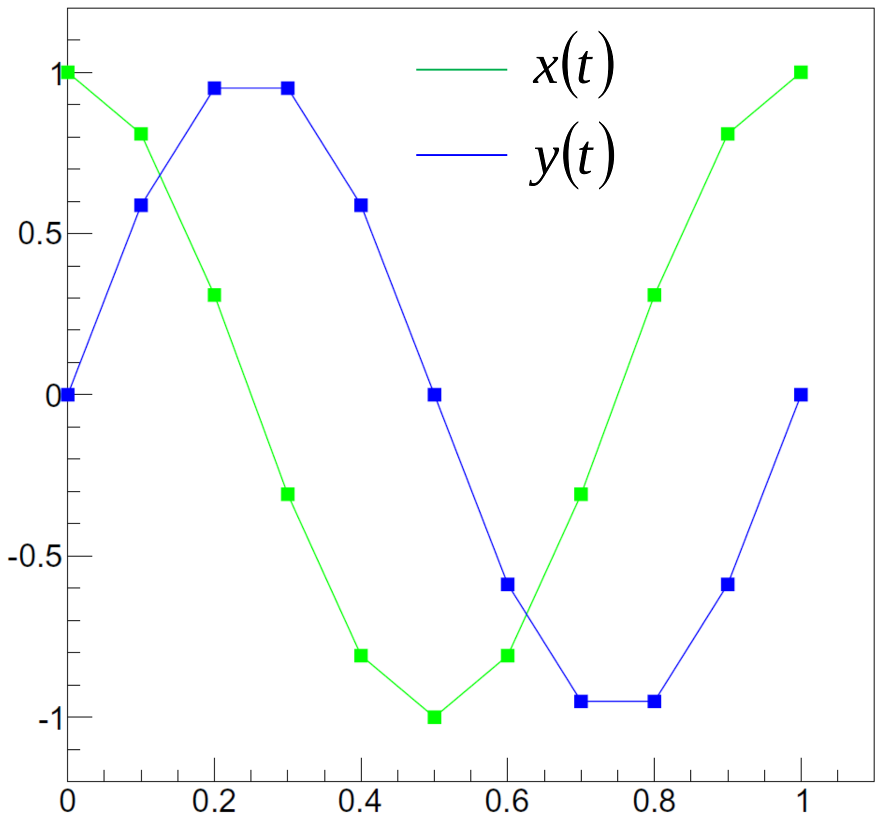
• numerická derivace souřadnic:

$$v_x(t) = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt} \qquad v_y(t) = \frac{y(t+dt) - y(t)}{dt}$$

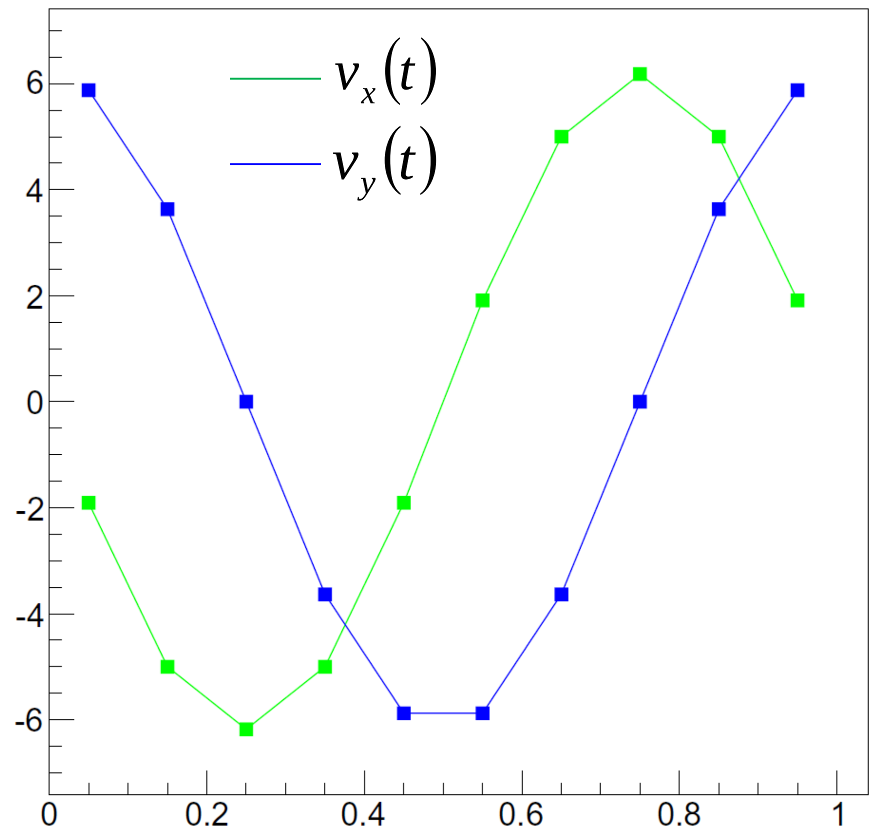
Rovnoměrný pohyb po kružnici

$n = 11 \qquad dt = 1/10 \qquad \omega = 2\pi \qquad T = 1$

časová závislost souřadnic



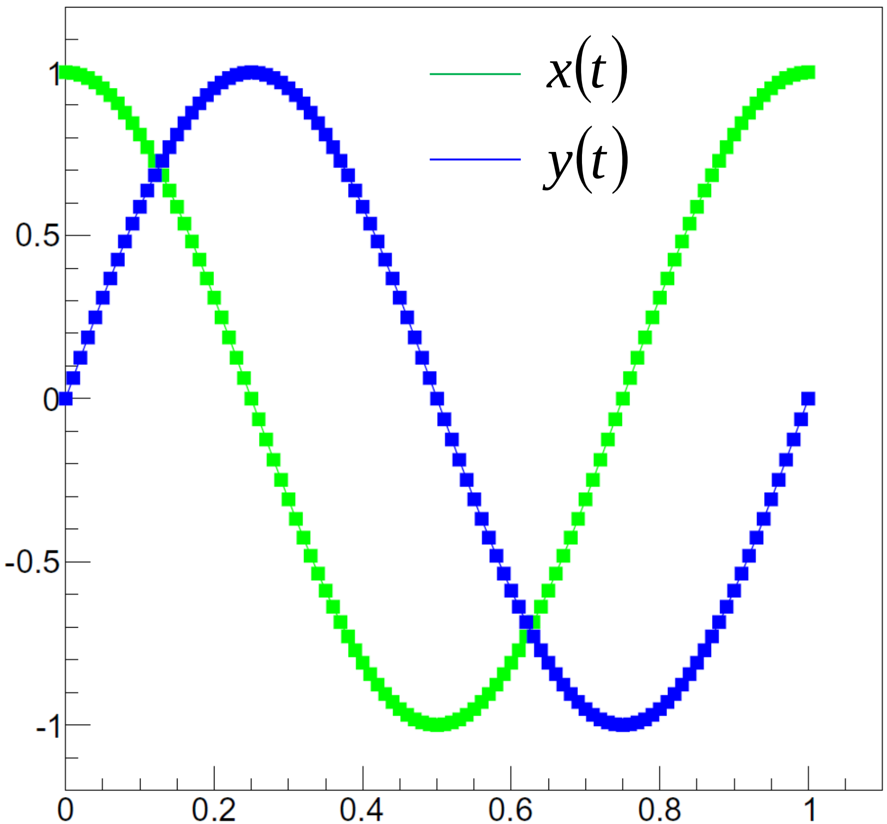
časová závislost složek rychlosti



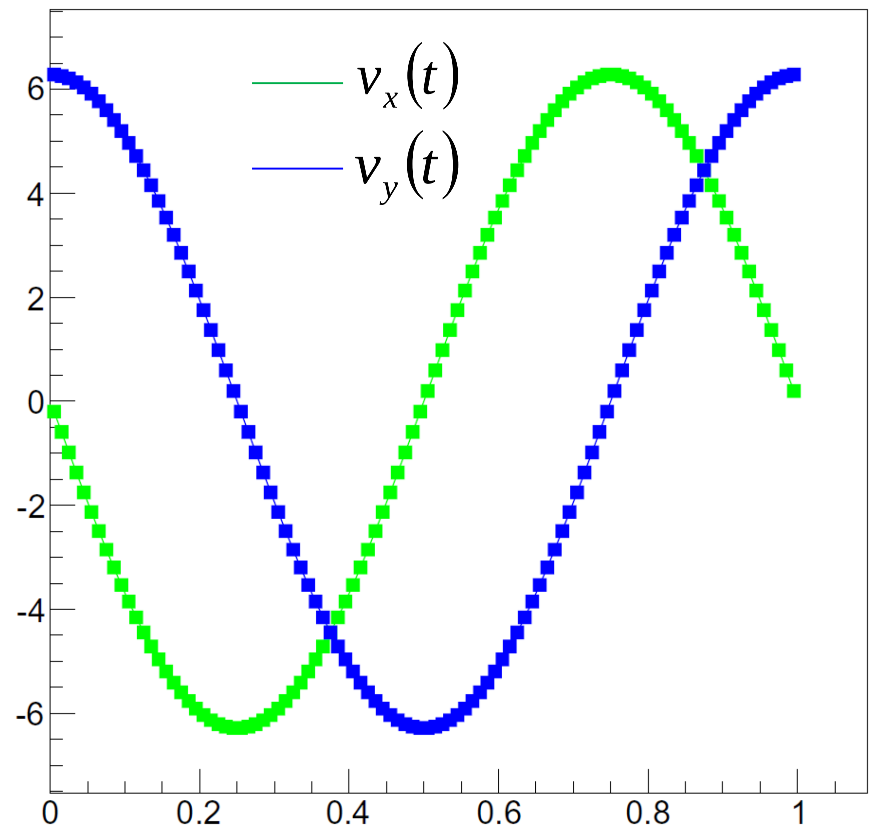
Rovnoměrný pohyb po kružnici

$n = 101 \qquad dt = 1/100 \qquad \omega = 2\pi \qquad T = 1$

časová závislost souřadnic



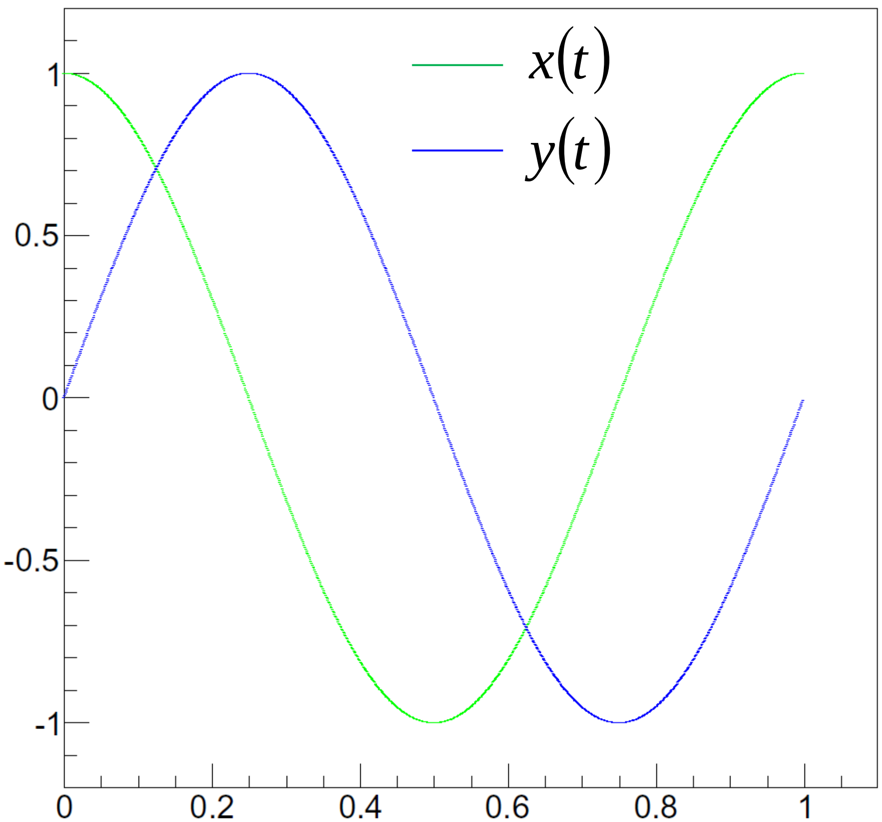
časová závislost složek rychlosti



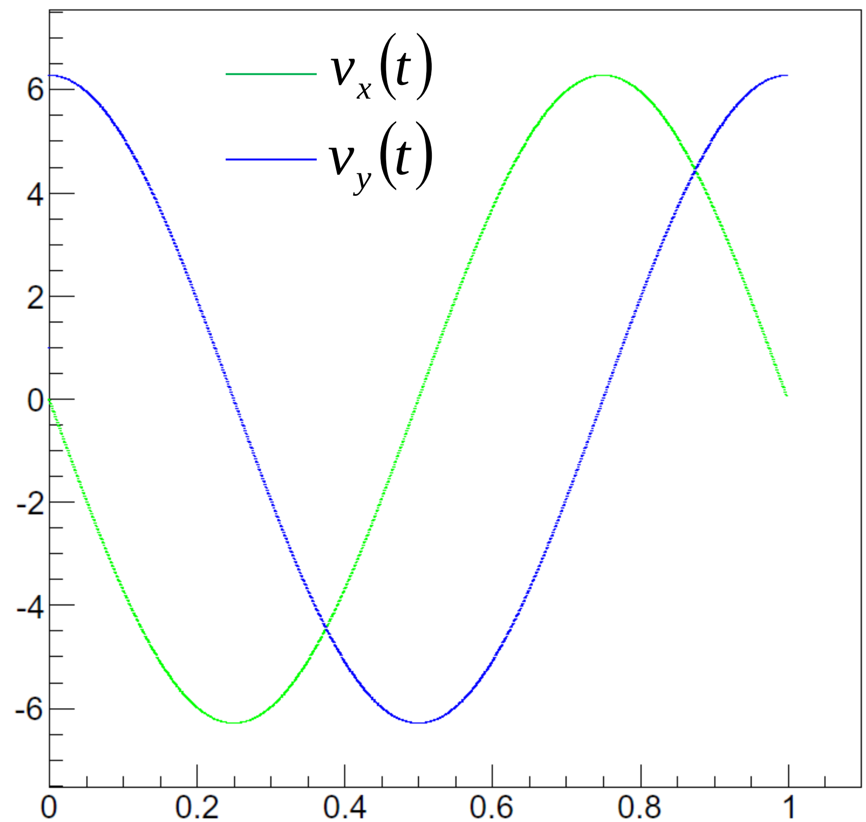
Rovnoměrný pohyb po kružnici

$n = 1001 \quad dt = 1/1000 \qquad \omega = 2\pi \quad T = 1$

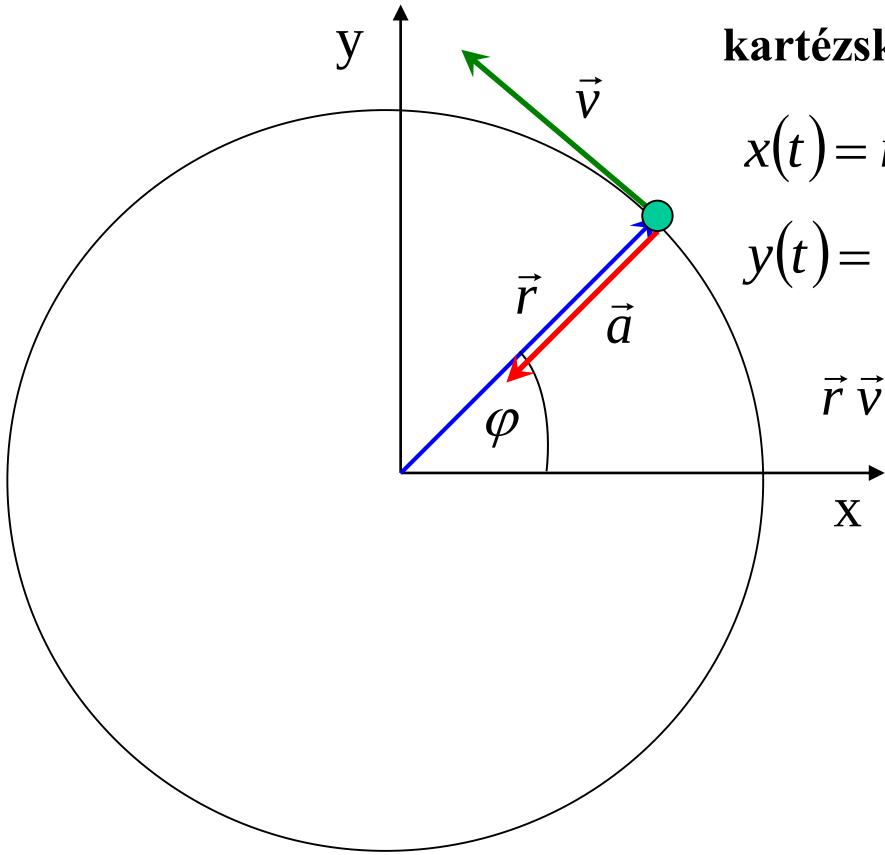
časová závislost souřadnic



časová závislost složek rychlosti



Rovnoměrný pohyb po kružnici



kartézské souřadnice

$$x(t) = r\cos(\omega t)$$

$$y(t) = r\sin(\omega t)$$

rychlost

$$v_x(t) = \dot{x}(t) = -r\omega\sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = \dot{y}(t) = r\omega\cos(\omega t)$$

$$\vec{r}\,\vec{v} = -r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) + r^2\omega\sin(\omega t)\cos(\omega t) = 0$$

$$v = \sqrt{\omega^2 r^2\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} = \omega r$$

zrychlení

$$a_x(t) = \ddot{x}(t) = -r\omega^2\cos(\omega t) = -\omega^2 x$$

$$a_y(t) = \ddot{y}(t) = -r\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2 y$$

$$a = \sqrt{r^2\omega^4\left(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)\right)} = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

$$a = \frac{v^2}{r}$$

ω - úhlová rychlost $\quad \omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{f}$ - perioda